PART I:

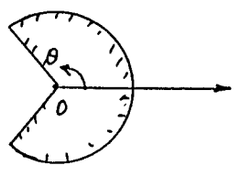
1. Solve the Boundary-value problem in Ω (20%)

$$\nabla^2 U(r,\theta) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

Boundary Conditions:

$$U(1,\theta) = f(\theta) \quad \text{for } |\theta| < 3\pi/4$$

$$U(r, -3\pi/4) = U(r, 3\pi/4) = 0 \quad 0 < r < 1$$



$$\Omega = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1,\ |\theta| \le 3\pi/4\}$$

where: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$

2. Find the integral Equation (10%)

$$x(t) = t^2 + \int_0^t \sin(t-u)\, x(u)\, du$$

3. Find the Fourier Series of the periodic function $F(x) = |x| \quad |x| \le \tau$ (10%)

Then Set $x = \tau/2$.

Find, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = ?$

PART II:

1. 若以傅立葉正弦級數（Fourier Sine Series）與傅立葉餘弦（Fourier Cosine series）來表示函數 $f(x)=x$，$0\le x\le\pi$.
   (a) 試問何者的收斂速度較快，說明之。（5%）
   (b) 試討論這兩種級數於 $x=0$ 處之收斂情形。（5%）

2. 試求解一階微分方程式
$$(3x^2y^2+e^y)\frac{dy}{dx}+2(xy^3+1)=0. \quad (10\%)$$

3. 試求作用力 $\vec{F}=(yze^{xyz}-4x)\vec{i}+(xze^{xyz}+z)\vec{j}+(xye^{xyz}+y)\vec{k}$ 沿着線段 C 所作的功（Work）。其中 C 表示由点 $(0,0,0)$ 至点 $(2,4,0)$ 之線段。 (10%)

4. 試以 z 之幂級數（Powers of z）型式，求出函数 $f(z)$ 之所有的 Laurent（或 Taylor）展開式
$$f(z)=\frac{z-2}{z^3-1} \quad (10\%)$$
並說明各級數展開式之收斂區域（Region of Convergence）.

5. (a) 求下列矩陣 A 所有特徵值（eigenvalue）之和與積. (5%)
$$A=\begin{bmatrix}2&1&-1&0\\1&3&4&2\\-1&4&1&2\\0&2&2&1\end{bmatrix}$$
   (b) 試問該矩陣 A 是否正定（Positive Definite）？（5%）

6. 証明在某一區域內，若函數 v 為函數 u 之調和共軛函數（Harmonic Conjugate）；同樣 u 亦為 v 之調和共軛函數，則 u 和 v 必為定值函數（constant function）. (10%)