1. (1) $f(x) = |\sin x| \quad -\pi < x < \pi$ ，且 $f(x+2\pi) = f(x)$ (5%)

試將 $f(x)$ 以 Fourier Series 表之

(2) 若 $f(x+2\pi) = f(x)$ 則 $f(x)$ 可以如下之 Fourier Series 表之

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

試証 Parseval's equality 即 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \pi\left[2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right]$ (5%)

(3) 試利用 (1) (2) 求

$$\frac{1}{1^2\cdot 3^2} + \frac{1}{3^2\cdot 5^2} + \frac{1}{5^2\cdot 7^2} + \cdots\cdots \text{至無窮多項}$$ 之值. (5%)

2. 試解下列微分方程式

(1) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \qquad (y' = \frac{dy}{dx})$ (7%)

(2) $y'' - y' + 2y = \cos x$ (7%)

3. 已知三次線性非齊次微分方程 (10%)

$y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = r(x)$ 其通解為 $y = y_h + y_p$

其中 y_h 為 $y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ 之齊次解且

$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ ，試利用 Variation of parameter

方法求 y_p，即令 $y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2 + w(x)y_3$

4. 某生解 $\mathcal{L}\{e^{t^2}\}$ 其法如下： (6%)

<Sol> 令 $f(t) = e^{t^2}$ $\qquad f'(t) = 2te^{t^2} = 2tf(t)$

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = 2\mathcal{L}\{tf(t)\}$ $\qquad sF - f(0) = -2\frac{dF}{ds}$

- - - - - - - - - - - -

你認為如何？若对請完成之，若不对請說明理由.

5. 試解联立微分方程 (10%)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} = 2x + 2 - 4e^t \\ 2\dfrac{dx}{dt} + 3\dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

169

6. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ 四个向量， (7%)
已知 $\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{B}\cdot\vec{D})\vec{C} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{D}$
試証

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = \begin{vmatrix} \vec{A}\cdot\vec{C} & \vec{A}\cdot\vec{D} \\ \vec{B}\cdot\vec{C} & \vec{B}\cdot\vec{D} \end{vmatrix}$$

7. 已知 $J_0(t)$ 為 $ty''+y'+ty=0$ 之一根，試求 $\mathcal{L}\{J_0(at)\}$ (8%)
<請先对上述微分方程式取 Laplace form，再求之>

8. $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{X}$ 為兩矩陣，若 $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X} = \lambda \underset{\sim}{X}$， $\underset{\sim}{X} \neq \underset{\sim}{0}$
則称 λ 為 $\underset{\sim}{A}$ 之 eigenvalue， $\underset{\sim}{X}$ 為 $\underset{\sim}{A}$ 之 eigenvector.
1) 試求 $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 之 λ 及 $\underset{\sim}{X}$ (7%)

2) $\underset{\sim}{A} = [a_{ij}]$， $\bar{\underset{\sim}{A}} = [\bar{a}_{ij}]$ $\bar{a}_{ij}$ 為 a_{ij} 之共軛複数 (7%)
若 $\bar{\underset{\sim}{A}}^T = \underset{\sim}{A}$ 則称 $\underset{\sim}{A}$ 為 Hermitian 矩陣.
試証 Hermitian 矩陣的 eigenvalue (λ) 為实数.

9. 試解

$$y'' - 2xy' + x^2 y = \sin x\, e^x \qquad (8\%) \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

10. 一曲线以向量參数表示法為 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$
當 t 以弧長 S 取代時， $\frac{d\vec{r}}{ds}$ 表 $\vec{r}$ 之单位切线向量.
即 $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$， 令 $\vec{P} = \frac{d\vec{u}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{u}}{ds}\right|$
(1) 試証 $\vec{P} \perp \vec{u}$ (3%)
(2) 令 $\left|\frac{d\vec{u}}{ds}\right| = K(s)$ (Curvature) 試証以任意參数 t 表曲线時，即以 $\vec{r}(t)$ 表示時，其 $K(t)$ 為 (5%)

$$K(t) = \frac{\sqrt{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 \left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|^2 - \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}$$

170