

1. 試解

(8%)

$$xyy' + 2x + y^2 = 0$$

2. (i) 矩陣 $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 試求 A 之特徵值 (eigenvalue λ) 及
特徵向量 (eigenvector \underline{x}) (5%)

(ii) 若 $A_{2 \times 2}$ 之特徵值為 λ_1, λ_2 , 其相對應之特徵向量為 \underline{x}_1 及 \underline{x}_2 (5%)

定義 $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ 及 $X = [\underline{x}_1, \underline{x}_2]$ 試証 $X^{-1}AX = D$

(iii) 已知 $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 利用 (ii) 求 A^{10} (5%)

3. 已知 xy 平面上的曲線, 其極座標方程式為 $\rho = a(1 - \cos\theta)$ $a > 0$ (10%)
試求此曲線所圍的面積及周長.

(Hint 面積 = $\frac{1}{2} \oint xy dy - y dx$, $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$)

4. 試解

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 3 \quad \left(\text{已知 } \left(\frac{\sin x}{x}\right)'' + \frac{2}{x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)' + \frac{\sin x}{x} = 0 \right) \quad (9\%)$$

5. 試解

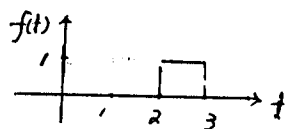
$$(D^2+1)(D-1)y = e^x + \cos x \quad (Dy = \frac{dy}{dx}) \quad (8\%)$$

6. 試求下列各 Laplace inverse

(10%)

(i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S}{S^2+2S+2}\right\}$ (ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(S-1)e^{-S}}{S(S+1)}\right\}$

7. (i) 已知 $f(t) = \begin{cases} 1 & 2 < t < 3 \\ 0 & t < 2 \text{ or } t > 3 \end{cases}$



(10%)

試求 $\mathcal{L}\{f(t)\}$

(ii) 若某生以如下方法求之:

$$\text{令 } g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & 2 < t < 3 \\ 0 & t < 2 \text{ or } t > 3 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\}$$

$$0 = S\bar{F}(S) - f(0)$$

$$\bar{F}(S) = 0 \quad \text{你認為對或不對? (請說明理由)}$$

8. 試解下列偏微分方程式 (10%)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad k > 0$$

$$\text{I.C. } t=0 \quad U=f(x) \quad -\infty < x < \infty$$

9. 已知 $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ (10%)

(i) 試求 $f(x)$ 的傅利葉積分 (Fourier Integral)

(ii) 利用 (i) 求 $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ 之值

10. 利用複變數積分 (Complex Integral) 求 (10%)

$$(i) \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$$