

本試題是否可以使用計算機: 可使用, 不可使用 (請命題老師勾選)

(12%) 1. 請求下列各序列之上極限及下極限:

(a) $a_n = (-1)^n + 1$

(b) $a_n = n^2(1 + (-1)^n)$

(15%) 2. 試証二曲線 $y = 3x^2$ 及 $y = 2x^3 + 1$ 在 $(1, 3)$ 有共同切線, 並描出他們的圖形。

(14%) 3. 請微分下列各函數:

(a) $f(x) = \frac{(2x+4)^5(2-3x)^2}{(x+1)^4(4-x)^3}$

(b) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right), x > 1$

(15%) 4. 設有一河流寬一公里, 自東岸一發電廠架設電纜至下游五公里西岸的工廠。假設水底架設費用是地面架設費用的 $5/3$ 倍, 請問什麼路線架設最便宜?

(14%) 5. 請積分下列各式:

(a) $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx$

(b) $\int_{-1}^1 x(1-x^2)^5 \, dx$

(15%) 6. 請求下述曲線所圍區域之重心座標:

$y = x - x^2$ 及 $x + y = 0$

(15%) 7. 試証內接於橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的最大長方體體積為

$8abc/3\sqrt{3} (a > 0, b > 0, c > 0)$ 。