

系所組別： 生物醫學工程學系甲、乙、丁組

考試科目： 工程數學

考試日期：0219，節次：3

※ 考生請注意：本試題 可 不可 使用計算機

1. (30%) 對一個矩陣A而言，回答下列問題：
 - a. 試寫出Eigenvalue 及Eigenvector的定義為何? (5 points)
 - b. 試寫出如何求得Eigenvalues 及Eigenvectors 的步驟? (5 points)
 - c. 試證明不同的Eigenvalues 對應的Eigenvectors彼此線性獨立 (5 points)
 - d. 試舉例說明Eigenvalues 及Eigenvectors在工程方面的應用 (5 points)
 - e. 在何種狀況下須使用generalized eigenvectors? (5 points)
 - f. 是否每一個矩陣A，均能找到一個nonsingular 矩陣P，使 PAP^{-1} 為對角矩陣(Diagonal matrix) (5 points)

2. (10%)試證明 $\cos \omega t$ 函數的 Laplace Transform 為 $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ (10 points)

3. (10%)我們知道矩陣是一種線性轉換(Linear transformation)。一個向量經矩陣轉換成另一個向量。如果有一矩陣 A且其映射關係如下；

向量 (1, 2, 3) 映射至向量 (4, 5, 6)
 向量 (4, 5, 6) 映射至向量 (7, 8, 9)

 - (a) 請問 從上述映射關係是否可以求得矩陣A?為什麼? (5 points)
 - (b) 是否可以求得向量(7, 8, 9)應該映射至何點?為什麼? (5 points)

4. (10%)一個質量為M，半徑為R之均質圓盤以圓心為轉軸之轉動慣量 (Moment of inertia)為何?必需寫出推導過程方可得分(10 points)(提示： $I = \int r^2 dm$)

5. (10%)請說明何謂 Divergence theorem of Gauss。(10 points)

6. (10%)一個函數 $f(x) = \exp(-x)$ 在 $x = 2$ 附近以一直線方程式來近似，則這直線方程式為何? (10 points)

7. (10%) $f = x^2 + 3y^2 + 4z^2$, $P: (1, 0, 1)$ 且 $a = -i - j + k$
 試求函數f在點P,方向a上之方向微分 (directional derivative) 為何? (10 points)

8. (10%)請寫出下列定義
 - (a) Gradient of a scalar field ($\text{grad } f, \nabla f$) (5 points)
 - (b) Divergence of a vector field ($\text{div } F, \nabla \cdot F$) (5 points)