

國立成功大學

112學年度碩士班招生考試試題

編 號：330

系 所：經濟學系

科 目：統計學

日 期：0206

節 次：第 1 節

備 註：不可使用計算機

※ 考生請注意：本試題不可使用計算機。請於答案卷(卡)作答，於本試題紙上作答者，不予計分。

- 本試題共三大題，每大題中有數小題，共 100 分。
- 請依題號依續作答。
- 請詳述理由或計算推導過程，否則不予計分。

一、(共 48 分) 奇老大經營青草茶專賣店有成，短期就擁有 55 家同質連鎖店。為了儘早獲得適當的經營模式經驗，他在試營運期間讓各店有不同的價格以及廣告支出，並收集這期間各店的銷售額 (S_i ，單位萬元)、平均價格 (P_i ，單位元)、廣告支出 (A_i ，單位萬元) 以及連鎖店是否座落於市中心 ($U_i=1$ ，表示第 i 個店家位於市中心； $U_i=0$ ，表示座落其它地區) 的資料，以進行相關商業分析。

1. (15 分) 為了瞭解銷售額是否因連鎖店座落於市中心而有差異，奇老大考慮以下迴歸模型：

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 U_i + e_i.$$

請證明最小平方方法所得到 β_2 的估計值恰好等於 $\bar{S}^U - \bar{S}^N$ ，其中 \bar{S}^U 為落於市中心連鎖店的平均銷售額、而 \bar{S}^N 為落於其他地區連鎖店的平均銷售額。

2. (5 分) 承上題，若要以前述迴歸進行假設檢定，請問虛無假設與對立假設為何？請說明理由與如何進行。

3. (3 分) 奇老大進一步考量下列迴歸模型：

$$S_i = \gamma_1 + \gamma_2 U_i + \gamma_3 P_i + \gamma_4 A_i + \gamma_5 A_i^2 + e_i.$$

請問廣告支出對銷售額的邊際效果為何？

4. (15 分) 承第 3 小題，若 $\gamma_4 > 0$ 且 $\gamma_5 < 0$ ，且由最小平方方法得到的係數與變異數矩陣估計值如下：

$$\hat{\gamma} = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \hat{\gamma}_3 \\ \hat{\gamma}_4 \\ \hat{\gamma}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.00 \\ 0.50 \\ -0.33 \\ 2.00 \\ -0.25 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\text{var}}(\hat{\gamma}) = \begin{bmatrix} 0.60 & -0.40 & 0 & 0 & 0 \\ -0.40 & 0.80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.16 & -0.05 \\ 0 & 0 & 0 & -0.05 & 0.10 \end{bmatrix}$$

請估計廣告邊際效果為 0 的轉折點，並估計該轉折點近似的 95% 信賴區間。(提示：本題可利用 delta-method 進行估算，也就是利用泰勒展開式 $f(\hat{\gamma}_4, \hat{\gamma}_5) \cong f(\gamma_4, \gamma_5) + \partial f(\gamma_4, \gamma_5) / \partial \gamma_4 (\hat{\gamma}_4 - \gamma_4) + \partial f(\gamma_4, \gamma_5) / \partial \gamma_5 (\hat{\gamma}_5 - \gamma_5)$ ，推導 $f(\hat{\gamma}_4, \hat{\gamma}_5)$ 的近似變異數，再利用本題所提供的估計值帶入運算。由於計算可能繁複，本題可不開根號。)

5. (10 分) 承第 4 小題，若 奇老大懷疑廣告支出的效果隨著是否位於市中心而有所不同。請問他該如何修正第 3 小題的迴歸模型以進行檢定？若誤差項服從(條件)常態分配，且利用最小平方方法估計後，本題模型與第 3 小題模型的殘差平方和 (sum of squared residuals) 分別為 200 與 240。請問假設檢定

的結論是？(提示：若 $F_{(p,v_1,v_2)}$ 表示在 F 分配下累積機率為 p 且自由度為 (v_1, v_2) 的臨界值，且 $F_{(0.95,1,50)} = 4.034$ 、 $F_{(0.95,2,50)} = 3.183$ 、 $F_{(0.95,1,53)} = 4.023$ 、 $F_{(0.95,2,53)} = 3.172$ 。)

二、(共 24 分) 若變數 Y 共有 n 個值且由下式產生：

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + e,$$

其中 $E(e|X_1) = 0$ ， $Cov(e, X_2) > 0$ ， $Cov(X_1, X_2) > 0$ ， $\beta_0 > 0$ ， $\beta_1 > 0$ ， $\beta_2 < 0$ 。

1. (10 分) 為了估計 β_1 ，小傑 考慮以下的迴歸模型：

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + v$$

請推導上式中最小平方法對 α_1 估計式的偏誤 (與 β_1 比較) 並判斷該偏誤的正負值。

2. (8 分) 為了估計 β_2 ，小美 考慮以下的迴歸模型，並試著以 X_1 作為 X_2 的工具變數

$$Y = \gamma_0 + \gamma_2 X_2 + u$$

請問此時 X_2 是否為有效的工具變數？請以適當的數學式加以說明。

3. (6 分) 若 小青 找到另一個有效的工具變數 Z ，並以下列模型進行最小平方法與兩階段最小平方法估計，

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + e$$

若 $\hat{Y}_{i,OLS}$ 代表依上式對第 i 個觀察值 Y_i 所獲得的最小平方法的預測值， $\hat{Y}_{i,2SLS}$ 為透過兩階段最小平方法預測值，則此時以下的關係是否正確？請說明理由。

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_{i,OLS})^2 \geq \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_{i,2SLS})^2.$$

三、(共 28 分) 太平洋 中某島上有兩城市，其地理氣候環境與經濟條件非常相似，但分別位於由高山阻隔的島嶼南北，其中 N 市因擁有捷運使中古屋的每坪價格高於 S 市。2021 年 9 月，某科技大廠突然宣布要設廠於 S 市，導致該市中古屋的每坪價格上升，但迄今 (2022 年底) 仍未有任何動工的跡象。為了研究「宣布設廠」對中古屋房市的影響，宏哥 分別在 N 市與 S 市隨機抽取了 n_1 與 n_2 筆於 2020 年 9 月交易成功的中古屋，也再度針對 2022 年 9 月於 N 市與 S 市隨機抽取了 n_1 與 n_2 筆交易成功的中古屋，並只記錄中古屋的每坪成交價格。宏哥 將這些資料整理後，得到以下的敘述統計：

年月	2020 年 9 月		2022 年 9 月	
	N 市	S 市	N 市	S 市
樣本數	200	100	200	100
平均中古屋的每坪價格(單位萬元)	22.33	19.44	24.18	23.37
樣本變異數	20	16	$\hat{\sigma}_n^2$	$\hat{\sigma}_s^2$

其中 $\hat{\sigma}_n^2$ 與 $\hat{\sigma}_s^2$ 宏哥 不小心忘了列出。

1. (6分) 請檢定「在 2020 年 9 月時兩市房價母體均數相等」此一虛無假設。
2. (6分) 請問您如何以線性(複)迴歸驗證「宣布設廠」對中古屋每坪價格的影響？請仔細寫出迴歸式，說明變數定義、虛無假設以及拒絕虛無假設的條件。
3. (6分) 請依表格資訊，寫下第 2 小題中你所提出的迴歸中各係數的估計值，並估算「宣布設廠」對中古屋每坪價格的影響。
4. (6分) 若 2022 年 9 月交易成功的中古屋不是當年隨機抽取，而剛好都是 2020 年 9 月所抽取(且在 2022 年有成交)的，而宏哥也能將兩年的資料，依個別中古屋進行配對。請問如何利用這些資訊，以異於第 2 小題的迴歸，來驗證「宣布設廠」對中古屋每坪價格的影響。請仔細寫下迴歸式，說明變數定義、虛無假設以及拒絕虛無假設的條件(提示：本題的迴歸為具有常數項與一個解釋變數的簡單迴歸)。
5. (4分) 宏哥認為兩期資料在可配對下，第 4 小題的迴歸潛在地優於第 2 小題的迴歸，請為他提出可能的理由。