

1. 求微分方程式 $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 5y = 0$ 的實數通解。(14%)

2. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -4 \\ -6 & 2 & 3 \\ 23 & -5\frac{1}{2} & -10\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 的 eigenvalues 是 $1, \frac{1}{2}, -1$.

若每個元素 (element) 均計算至小數點以下三位, 請計算 A^{1000} . (16%)

3. 一個 skew-Hermitian 矩陣的 eigenvalue 應有什麼特性? 請證明您的答案。若矩陣 A 為 skew-Hermitian 表示 $A^T = -A$. (10%)

4. 向量 $\vec{F} = (z^2 - 2x^2)\vec{i} + (2y^2 - x^2)\vec{j} + (z^2 - y^2)\vec{k}$.

S 為方程式

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{3} + \frac{(z-1)^2}{6} = r^2$$

所代表的面 (r 為實數), T 為 S 的內部, $V(T)$ 為 T 的體積, 請計算

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V(T)} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

其中 $d\vec{A}$ 垂直於表面向外。(14%)

5. 求微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = e^{-x} \cos x$ 的實數通解。(12%)

6. 設 z 為複數, 請計算複數平面上的積分

$$\oint_C \frac{z^2 + 2}{z^2 + iz + 2} dz,$$

其中 C 為 $z = (3 \cos t) + i(5 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 所代表的橢圓, 積分為反時針方向。(16%)

7. 長方形薄膜 (Rectangular Membrane) 振動的方程式為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

其中 $u = u(x, y, t)$ 為垂直於 x, y 平面方向的位移。邊界條件 (Boundary Condition) 為

$$u(0, y, t) = u(P, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, q, t) = 0,$$

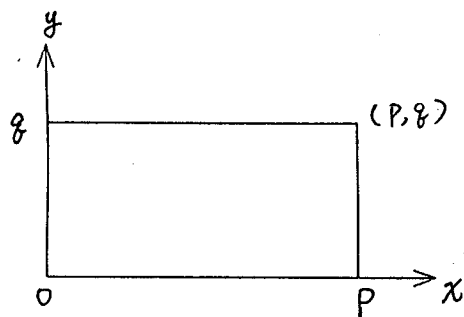


圖 1

如圖 1。設 $P = 10 \text{ cm}$, $q = 5 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ m/sec}$ 。

(a) 若振動的節線 (Nodal Line) 是圖 2 中虛線所表示, 振動頻率為何? (9%)

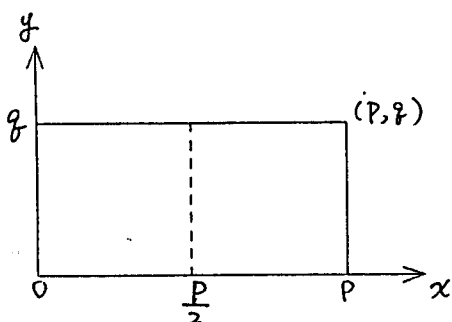


圖 2

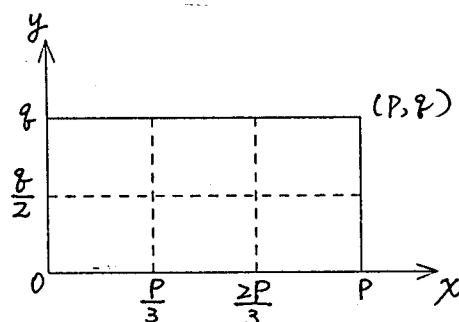


圖 3

(b) 若振動的節線是圖 3 中虛線所表示, 則振動頻率為何? (9%)

總計 100%