

1. (a) 求常微分方程式

$$y' - 2y = 3, \quad y(0) = 1.5$$

的特解 (particular solution)。 (10%)

- (b) 求常微分方程式

$$y'' + 6y' + 10y = 5x + 8$$

的實數通解 (general solution)。 (10%)

2. 設向量 F 為

$$F = (-3z - 2y)\mathbf{i} + (2x - 3z)\mathbf{j} + (2y - 4x)\mathbf{k},$$

求線積分 $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$ 。其中 C 為球形

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

與平面

$$x + y + z = 0$$

相交的圓，由點 $(1, 1, 1)$ 觀看，線積分是沿反時針方向。 (16%)

3. 設 $f(x)$ 為一週期函數，定義為

$$f(x) = x, \quad \text{當 } -2 \leq x \leq 2,$$

$$f(x+4) = f(x).$$

若以傅利葉級數 (Fourier Series) 表示 $f(x)$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right),$$

則 a_1, a_3, b_1, b_3 為何? (16%)

4. 一根小提琴弦長 0.5 米，弦的波動方程式為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

其中波速 $c = 800 \text{ m/sec}$ 。若起始條件為

$$u(x, 0) = \sin 6\pi x + \frac{1}{2} \sin 8\pi x,$$

求波動方程式的解 $u(x, t)$ 。 (16%)

(背面仍有題目,請繼續作答)

5. 設向量 F 為

$$F = (4x + y)\mathbf{i} + (5y - 4x^2 + z^2)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k},$$

(a) 求 $\nabla \cdot F$ 和 $\nabla \times F$ 。(6%)

(b) 求 $I = \iint_S F \cdot \mathbf{n} dA$ 。 I 是通過 S 面的全部通量, S 是球體

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2 \text{ 表面。 (10\%)}$$

6. 設 z 為複數, 請計算複數平面的積分

$$I = \oint_C \frac{z}{z^2 + 1} dz,$$

其中 C 為沿順時針方向環繞 $|z + i| = 1$ 的圓。(16%)