

- 1、求微分方程式 $y''+2y'+5y=3\sin x+2\cos x$ 的通解。 (10%)
- 2、求微分之程式 $y'+2xy=x$, $y(0)=1$ 的特解。 (8%)
- 3、在一個直角座標系中, $U(x,y,z)=0.01(z^2\mathbf{i}+2x\mathbf{j}+y^2\mathbf{k})$ 代表位移場 (displacement field)。請計算在點 $(0, 1, -2)$ 的 (a) 旋轉角 (可用 radian 或 degree 表示, 取三位有效數字); (b) 旋轉面的法向量 (normal vector)。 (12%)
- 4、設 $F(x,y,z)=(2y-z)\mathbf{i}+(z^2-x)\mathbf{j}+(x-y^2)\mathbf{k}$, 設 C 為橢球 $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{(z+2)^2}{6} = s^2$ 與平面 $-x+z+3=0$ 相交的橢圓形, $A(s)$ 為此橢圓形的面積, 請計算 $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{A(s)} \oint_C F \cdot dr$, 其中線積分的方向由 $(0, 0, 10)$ 觀看為反時針方向。 (12%)
- 5、矩陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$
- (a) 求 A 的 eigenvalues λ_1 和 λ_2 ;
- (b) 設 $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, 設 $A = X\Lambda X^{-1}$, 求任何一組 X 與 X^{-1} 。 (12%)
- 6、設 $F(x,y,z)=x^2-2y^2+2y-3z^2$, 請計算面積分 $\iint_S \nabla F \cdot dA$, 其中 S 為球形 $x^2+y^2+z^2=1$ 的表面。 (12%)
- 7、設函數 $f(t)$ 在 $-2 \leq t \leq 2$ 區間內為 $f(t)=t$; 在 $-\infty < t < \infty$ 區間為週期函數 $f(t+4)=f(t)$ 。若將 $f(t)$ 以 Fourier Series 表示:
- $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{2} + b_n \sin \frac{n\pi t}{2} \right),$$
- 求 a_1, a_2, b_1, b_2 。 (12%)
- 8、在一維介質中傳播的波滿足下列的方程式:
- $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
- 其中 c 為波速, $u = u(x, t)$, x 與 t 的單位分別為 m 和 sec 。介質長 $2 m$, 波速

(背面仍有題目, 請繼續作答)

為 800 m/sec，在介質的兩端保持 $u=0$ ，亦即邊界條件為 $u(0,t)=u(2,t)=0$ 。
 設介質中的波為單一頻率的駐波 (standing wave)，且 $u(2/3,t)=u(4/3,t)=0$ 對
 $-\infty < t < \infty$ 均成立。

(a) 滿足上述條件的波的最低可能頻率為何？它相應的波長為何？

(b) 若 $|u(x,t)|$ 的極大值為 5，請寫出任一個最低可能頻率的波函數 $u(x,t)$ 。

(12%)

9. 設 $i = \sqrt{-1}$ ， z 為複數。請計算 $\oint_C \frac{(z^2+4)}{(z-i)^3(z^2+3)} dz$

其中 C 為 $|z-i| = \frac{1}{2}$ 的圓。

(10%)