

1. 求極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \tan(t^2) dt$ . (10%)

2. 求下列各積分：

(a)  $\int \frac{3}{x^3 - 1} dx$ ; (10%)

(b)  $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$ . (10%)

3. 令函數  $f(x) = 5e^x + x^3$ , 而  $g$  為  $f$  的反函數, 求  $g'(5)$ . (10%)

4. 已知函數  $f$  滿足  $f(0) = 0$ ,  $f'(x) = \begin{cases} x+4, & \text{當 } x < -2 \\ x^2-2, & \text{當 } -2 \leq x \leq 0 \\ e^x-3, & \text{當 } x > 0 \end{cases}$ ,  
 試繪出  $f$  的函數圖形. (10%)

5. 令  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)x^n$ , 試利用  $\frac{1}{1+x}$  的冪級數  
 求  $f(-\frac{1}{2})$ . (10%)

6. 已知一個半徑為  $a$  的半圓球形物體, 其在任一點的密度與此點  
 至底面圓心的距離成正比. 試求此物件的質量和質量中心. (14%)

7. 有一水槽裝滿 100 公升的純水, 若以每分鐘 10 公升的速度注入  
 每公升含 0.2 公斤食鹽的食鹽水, 設食鹽水與純水完全溶合後  
 以相等的速度溢出水槽. 問 8 分鐘後水槽中含有多少食鹽? (12%)

8. 欲用一個圓柱焊接一個半圓球作成一個體積為  $V$  的金屬槽,  
 試問其尺寸為何時所需的金屬材料最少? (14%)