

(5%) 1. (a) 試求極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x - \sin x} = ?$

(5%) (b) 試求積分 $\int e^x \cos 2x dx = ?$

(12%) 2. 設函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{若 } x \neq 0 \\ 0 & \text{若 } x = 0 \end{cases}$

試證 $f'(0)$ 存在且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 處連續

(12%) 3. 某曲綫之參數方程式為 $\begin{cases} x(t) = 3t + 1 \\ y(t) = t^2 - t \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 5$

試求 (a) $t=2$ 處之切綫方程式

(b) 該曲綫之長度

(10%) 4. 設 $F(x) = \int_0^x (x-t) \sin^2 t dt$ 試求 $F'(x) = ?$

(10%) 5. 試求瑕積分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = ?$

(12%) 6. 設函數 $f(x,y) = \begin{cases} 2\sqrt{xy} & \text{若 } xy \geq 0 \\ 0 & \text{若 } xy < 0 \end{cases}$ 試求 $D_1 f(0,0)$ 並證明

f 於點 $(0,0)$ 為不可微分

(10%) 7. 設 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 為一正項級數又設函數 $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ 為單調

減函數若存在 $m \in \mathbb{N}$ 且當 $n \geq m$ 時有 $f(n) = a_n$ 試證 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

與 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同為收斂或同為發散

(12%) 8. 試求 $f(x) = x^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}$ 之極值與反曲點並繪製

其圖形

(12%) 9. 設函數 $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 而 $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(a) 試寫出 $f(x)$ 之五階 Maclaurin 展開式 (Maclaurin's formula)

(b) 證明 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 間可表為 Maclaurin 級數