

本試題是否可以使用計算機: 可使用, 不可使用 (請命題老師勾選)

1. 給予一個區域 $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 並且其質量密度 $\rho = \alpha xy$, 其中 α 為一個常數。問題: (a) 此區域之質量為多少? (15%) (b) 此區域之質量中心位於何處? (10%)

2. 應用方程式 $y = ax + b$ 於模擬下列數據

x	1	2	3	4
z	3	4	5	9

若採用最小平方法, 則誤差值為多少? (17%)

3. 給予一個微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = x$ 。問題: (a) 求通解; (10%) (b) 給予起始條件 $y(0) = 0$ 與 $y'(0) = 1$, 求其解。(8%)

4. 給予一個擴散分方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \leq x \leq 1, t \geq 0$, 邊界條件為 $u(0, t) = 100e^{-t}$, $u(1, t) = 0$, 起始條件 $u(x, 0) = 0$.

問題:

- (a) 假設 $u_1(x, t)$ 滿足 $u(0, t) = 100e^{-t}$ 及 $u(1, t) = 0$, 則 $u_1(x, t)$ 之解為何?

(10%)

- (b) 假設 $u(x, t)$ 可表為 $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, 則 $u_2(0, t)$ 、 $u_2(1, t)$ 及 $u_2(x, 0)$ 各為何? (10%)

(c) 代 $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ 入原擴散分方程式, 其結果為何並求 $u_2(x, t)$ 之解; (18%)

- (d) 合併 $u_1(x, t)$ 與 $u_2(x, t)$, 則 $u(x, t)$ 之解為何? (2%)