

系所組別： 物理學系

考試科目： 古典力學

考試日期： 0224，節次： 1

※ 考生請注意：本試題不可使用計算機

(I) 兩個物體作一維運動，描述此運動的 Lagrangian 為：

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{4}k(x_1 - x_2)^4$$

- (a) 請寫下對應的  $x_1$  與  $x_2$  的運動方程式。 (10)
- (b) 求對應的 Hamiltonian。 (5)
- (c) 這個系統對應物理守恆量是什麼？ (5)
- (d) 如果  $X$  是質心座標， $x = x_1 - x_2$ ，請寫下  $X$  與  $x$  對應的 Lagrangian。  
(請定義清楚你所用的符號) (5)

(II) 質量是  $m$  的物體作一維簡諧振盪 (設其振盪頻率為  $f$ )。令  $x$  為離開平衡位置的位移。

- (a) 請寫下對應的 Hamiltonian,  $H$ 。 (5)
- (b) 求  $x(t)$  與  $p(t)$  的 Hamilton Equations (5)
- (c) 求此 Hamilton Equations 的解 (5)
- (d) 如果  $x(0) = 0$ 、 $p(0) = 0$ ，則系統的能量  $E = ?$  (5)
- (e) 如果  $E = E_0$ ，則  $p$  為最大值時的物體位置  $x = ?$  (5)

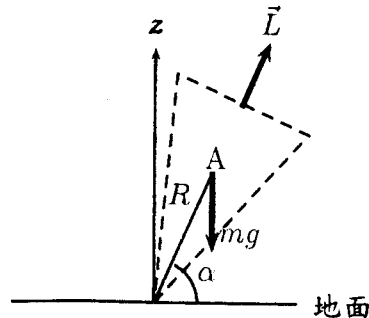
(III) 物體的運動方程式為

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = \vec{F} + \vec{v} \times \vec{A}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

其中  $\vec{F}$  與  $\vec{A}$  均為常向量，且  $\vec{F} = F \hat{i}$  以及  $\vec{A} = A \hat{k}$ 。

- (a) 求  $\vec{v}(t) = ?$  (假設  $\vec{v}(0) \neq 0$ ) (15)
- (b) 求  $\vec{x}(t) = ?$  (假設  $\vec{x}(0) = 0$ ) (10)

(VI) 如圖，物體在地面上作轉動，如果它的角動量為  $\vec{L}$  而且  $\vec{L}$  與地面有一個夾角為  $\alpha$ 。令質心  $A$  與地面接觸點的距離為  $R$ ，物體質量為  $m$ ，地面重力加速度為  $g$ 。



- (a) 求  $\frac{d\vec{L}}{dt} = ?$  (5)
- (b) 證明  $\frac{dL_z}{dt} = 0$ 。 (5)
- (c) 求物體進動的角速率  $|\vec{\omega}| = ?$  (15)