

系所組別： 物理學系

考試科目： 近代物理學

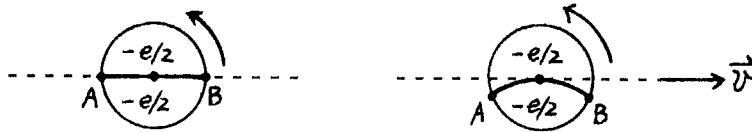
考試日期： 0224，節次： 3

※ 考生請注意：本試題不可使用計算機

1. (10+5分) (a) 由Lorentz轉換可知， $d\tau^2 \equiv c^2 dt^2 - (d\bar{x})^2$ 在座標轉換下是不變的純量，故 $p_\mu \equiv m_0(cdt, d\bar{x})/d\tau = (E/c, p_1, p_2, p_3)$ 是4-vector，其分量會變，但長度不變。在實驗室中，有一高速電子撞向另一靜止的電子，若要產生pair production $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+ + e^-$ ，則高速電子的能量最少需多少？提示：在它們的「零動量座標」(center of momentum, CM frame) 中四正負電子都靜止時，能量最低。

(b) 電子與原子核間的spin-orbital作用通常是在電子的靜止座標中來推導，即電子有磁矩，而原子核以速度 $-\vec{v}$ 在電子處建立磁場而得。但我們也可在原子核靜止的座標中定性地看這作用。把電子想成是一個帶電荷 $-e$ 、繞中心垂直軸旋轉的圓盤。在圓盤上，畫一通過中心的直線AB將電荷平分，如下圖左。請用Lorentz座標轉換說明：此直線AB在原子核靜止的座標中會變成如下圖右所示的曲線(故電子電荷分布變成不對稱而有電雙極矩，此電雙極在原子核的電場中有角位能)。

在電子 e^- 的座標 (O') 在原子核 N^+ 的座標 (O)



2. (20分) 用Shroedinger eq. 導出 $m \frac{d}{dt} \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \psi(x,t)$ 與 $\frac{d}{dt} \langle p \rangle = \left\langle \frac{-dV(x)}{dx} \right\rangle$ 。
3. (20分) 原先有無限位能井 $V(x) = 0$ for $0 \leq x \leq a$; $V(x) = \infty$ for $x < 0$ & $x > a$ ，粒子 m 在最低態。現在 $x = a$ 的 ∞ 位能牆突然被移到 $x = b$ ，而 $x = 0$ 的牆不變，則粒子 m 會落在新的最低態的機率 = ?
4. (20分) 在三邊長均為 L 的立方體無限位能井中，單粒子能階是 $E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ 。假設有 N 個不相作用的fermions被放進這井中， N 非常大，因此 (n_x, n_y, n_z) 可視為是連續的(我們可簡寫為 (α, β, γ))，求 Fermi energy E_F 與總能量 E_{tot} 。
5. (15分) 氫原子中電子與原子核間有所謂的spin-orbital作用 $H_{SL} = \frac{1}{2m^2 c^2} \vec{S} \cdot \vec{L} \left(\frac{-e}{r} \frac{d\phi}{dr} \right)$ (見題目 1(b))，我們把它簡寫成 $H_{SL} = \frac{\alpha}{r^3} \vec{S} \cdot \vec{L}$ (for $\phi(r) = \frac{e}{r}$)。若電子狀態的主量子數 n 、軌道角動量 ℓ ，證明 H_{SL} 引起的能階改變分成二群，分別是 $\alpha \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{n\ell} \frac{\hbar^2}{2} \begin{cases} \ell \\ -\ell-1 \end{cases}$ ，其中 $\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{n\ell}$ 表 $\frac{1}{r^3}$ 在這些狀態中的期望值。
6. (3+2+2+3=10分) 簡答題(中文字不超過十個)：
- (a) 《Science》選出2012科學界最重大的十項發現，排第一的是「發現上帝粒子Higgs」，排第七的是「証實Majorana fermions存在」。請問Higgs的功用是什麼？Majorana fermions指的是什麼？
- (b) 空氣中幾乎無氮，常被拿來玩的氮來自能長期收集氣體的天然氣礦床中。那被收集的氮又是哪裡來的？(因此幾十年後天然氣開採完時，氮、油、氣都沒了，怎麼辦？)
- (c) 2012諾貝爾物理獎與Schroedinger's cat有關。Schroedinger's cat指的是量子力學中的哪個現象？
- (d) 分別寫下一個狀態被粒子佔據的機率：古典統計、Fermion統計、Boson統計。