國立成功大學七十八學年度應用數学 考試(基礎數学(A)試題) 共 1 頁 第 1 頁

(甲.乙.丙組)

1. 設函數 $f, g:[0,1]\to\mathbb{R}$，$f(x)=\cos\sqrt{x}$，$g(x)=\sin^{-1}\sqrt{1-x}$.
 (a) 試問在点 $x=0$，f 與 g 是否連續？是否可微分？
 (b) 試求 f 與 g 之導函數 f' 與 g'.（需指明其定義域 $D_{f'}$ 及 $D_{g'}$）.

2. 設函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=\begin{cases}0 & ,\text{若 } x\le 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & ,\text{若 } x>0.\end{cases}$
 (a) 試求 f 之三階 Maclaurin 公式.
 (b) f 在点 $x=0$ 之鄰近是否可以表為 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$？

3. (a) 試証：对于任意 $x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$，$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\le n\sum_{i=1}^{n}x_i^2$.
 (提示：在 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 之限制下，求 $x_1+\cdots+x_n$ 之極大值).
 (b) 試証：瑕積分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$ 為發散，但 $\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}\frac{1+x}{1+x^2}dx$ 存在.
 (c) 試求：$\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$.
 [本題三小題任選答二小題].

4. (a) 設对任意正整數 n，$a_n>0$. 試証：$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\limsup_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
 (b) 如何將交錯的諧和級數 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$ 重排而使其和為 1？

5. 設函數序列 $\{f_n\}$ 点態收斂 (pointwise convergence) 於函數 f.
 (a) 若每一 f_n 皆在 $[a,b]$ 為 Riemann 可積，為使 $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b f$，應在收斂性上加什麼充分條件？
 (b) 若每一 f_n 皆在 $[a,b]$ 為 Lebesgue 可積，為使 $\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]}f_n=\int_{[a,b]}f$，應加什麼充分條件？
 (c) 當 $\{f_n\}$ 平均收斂 (mean convergence) 於 f 時 (即 $l.i.m.\,f_n=f$)，是否 $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b f$ 與成立？（此時 $\int_a^b$ 係 Riemann 積分）.
 [本題三小題任選答二小題].