80學年應數所入學考試　基礎數學A試題

注意：(1) 第一題必須做；
(2) 其餘任選四大題作答，超過者以答卷之前四題計算；
(3) 每大題二十分。

1．(a) 設 I 為 R 之一子集．若 $f: I \to R$ 為非負可測且 $f(I)=\{a_1, a_2, \cdots\}$．試利用 Lebesgue 積分收斂定理之一，證明：f 在 I 上之 Lebesgue 積分 $\int_I f$ 等於 $\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \cdot \mu(A_j)$，其中 μ 為 R 上之 Lebesgue 測度，$A_j=\{x \in I \mid f(x)=a_j\}$，$\forall j \in N$．

(b) 設 $A=\{(x,y,z) \mid 0<x<y<z<1\}$，$f(x,y,z)=x$，試求 $\int_A f=$?

2．(a) 試求 $\limsup_{x\to+\infty}(x-[x])$，其中 $[x]$ 為最大整數函數．(須有步驟及理由)．

(b) 設常數 $c \in R$，試問滿足以下陳述之函數 f 是否為唯一，理由為何？並求之．

(1) $f: R \to R$；

(2) $\forall \varepsilon>0$, $\forall \delta>0$, $\forall x \in R$ $(0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-c|<\varepsilon)$．

3．(a) 試求 $\exp(-x)$ 之 Maclaurin 展開式及 Maclaurin 級數．

(b) 試問以下陳述是否為真？

$$\forall x>0,\ \frac{x^8}{8!}-\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{10}}{10!}-\frac{x^{11}}{11!}+\ldots>0.$$

詳細說明理由．

4．設 $\{a_n\}_n$ 為一實數序列，$\lim_{n\to+\infty} a_n=L$，次設 $u_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j$．試問：序列 $\{u_n\}_n$ 是否為收斂？若為收斂，試求其極限．(註：$L \in \mathbb{R}$)．

[提示] $|u_n-L| \le \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{k-1}(a_j-L)\right| + \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n}|a_j-L|$, $k \le n$.

5．一半徑為 r，高度為 L 之圓柱形油桶，平放於地面上(即二底面垂直於地面)，桶之上方開一口，並以每秒 k 公升之速度注入汽油．試問：當油之高度為 h 時，$(0<h<2r)$，油上升之速度為若干？

6．(a) 試求函數 $F: [-3\pi/2, 3\pi/2] \to R$ 以使 $F'(x)=|\sin x|$．

(b) 上述函數 F 於何處有極大值及極小值？