國立成功大學 81 學年度應數所(甲乙)考試(線性代數試題) 共 2 頁 第 1 頁

~~Part I:~~

1. Let V and W be vector spaces over the field F and $\dim V$, the dimension of V, finite. Let $T : V \to W$ be a linear transformation of V into W. Prove that
$$\dim V = \dim \ker T + \dim T(V).$$
[Here $\ker T$ denotes the kernel of T and $T(V)$ denotes the image of T.] (15%)

2. Let V denote the vector space of functions that are linear combinations of e^x, xe^x, x^2e^x and e^{2x}. Define $T : V \to V$ by $T(f) = \frac{d}{dx}(f)$ for every $f \in V$. Find both a Jordan canonical form and a Jordan canonical basis for T. (20%)

3. Let $V = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{C}\}$ be a vector space over the complex field $\mathbb{C}$ with the Euclidean inner product $u \cdot v = \sum_{i=1}^{3} u_i \overline{v_i}$ where $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3 = V$. Apply the Gram-Schmidt process to transform the basis (i, i, i), $(0, i, i)$, $(0, 0, i)$ into an orthonormal basis. [Here $i = \sqrt{-1}$.] (15%)

036

81學年應數所入學考試　　機率論試題

PART II [Probability]

1. 舉一例以說明以下陳述不真：『若X為一非退化隨機變數(non-degenerate r.v.)，則 $1/X$ 為一隨機變數.』　(應說明理由)　(6分)

2. 一袋內置三錢幣，拋擲時出現正面之機率分別為0.4、0.5、0.6，今自袋中隨機抽取一錢幣，連續拋擲k次，X表這k次拋擲時正面出現之次數.
   a) 試求：隨機變數X之機率密度函數(p.d.f.)　(6分)
   b) 試問X是否具二項分配？理由為何？　(8分)

3. 設隨機變數X之機率密度函數為 $f:R\to R:f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{-|x-1|}$；次設 $Y=XI_A$，其中 $A=\{1<X<2\}$，(I_A 為指標函數).
   a) 試求Y之累積分配函數(c.d.f.)，並證：Y不為離散型，亦不為連續型.　(10分)
   b) 試求 $EX-EY=$?　(10分)

4. 設隨機變數 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 為獨立且均具相同之分配，$EX_1=\mu$，$VarX_1=\sigma^2>0$，$S_n=X_1+\cdots+X_n$. 次設隨機變數 Y_n 具 $N(n\mu,n\sigma^2)$，$\forall n\in N$；$\{C_n\}_n$ 為一實數序列.
   試證：$\lim_{n\to+\infty}(P\{S_n\le C_n\}-P\{Y_n\le C_n\})=0$.　(10分)