國立成功大學八十一學年度應數所入學考試(微積分 試題) 共 1 頁 第 1 頁

* 以下各題所設函數 f 皆為:

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\forall x,y\in(0,+\infty)$, $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$.

注意:做每一題時,只能用前面各題之結果而不得引用其後各題的結果. 並在<u>不</u>預知 f 為<u>自然對數函數 ln</u> 之情形下為之.

1. 試求 $f(1)=?$ 並證明:若 f 在点 $x=1$ 為連續,則 f 在 $(0,+\infty)$ 上各点皆為連續.
2. 試證:若 $f'(1)=1$,則 $\forall x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=1/x$.
3. 試證:f 為可逆函數.[即證 f 有反函數 f^{-1}].
並微分其反函數 f^{-1}.[即求 $Df^{-1}(x)=\frac{d}{dx}f^{-1}(x)=?$].
4. 試證:若 $0\neq x>-1$,則 $\frac{x}{1+x}<f(1+x)<x$.
5. 試求:$\int f(x)dx=?$ 及 $\int f^{-1}(x)dx=?$
6. 設函數 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_1^x\frac{1}{t}dt$.
試証:$\forall x,y\in(0,+\infty)$, $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$.
試求:$Df(|x|)\left(=\frac{d}{dx}f(|x|)=\frac{d}{dx}\int_1^{|x|}\frac{1}{t}dt\right)=?$
7. 試求在曲线 $y=f(x)$ 上,自点 $(1,f(1))$ 至点 $(2,f(2))$ 之弧長 $L(s)$.
8. 試求:f 在点 $x=1$ 之 n 階 Taylor 公式.[其中 n 階餘式 $R_n(x)$ 以 n 階導数之形式表之]. 並試由 $\lim_{n\to+\infty}R_n(2)=?$
證明:$f(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}/n$.
9. 試討論函数 $F(x,y)=xf(x)+yf(y)$ 在何處有相對極值.
10. 設平面區域 $R=\{(x,y)\mid 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1/x\}$. 試將重積分 $\iint_R\sqrt{f(x)}\,dxy$ 表為:"先对 x 後对 y 之偏積分" 與 "先对 y 後对 x 之偏積分".
並求:$\iint_R\sqrt{f(x)}\,dxy=?$

040