

1. (a) double $x, y;$

$$x = \text{sqrt}(2); \quad (x = \sqrt{2})$$

$$y = x * x; \quad (y = x^2)$$

上面程式執行結果一般 y 不會等於 2. 請說明理由.

(5%)

(b) 請說明如何運用四則運算求 $\sin(2.0)$ 之近似值.

(5%)

2. (a) 函數 $f(x)$ 定義在 $[-h, h]$ 上, 而 $|f''(x)| \leq M$ 且 $f(-h) = 0, f(h) = 0$,
證明 $|f(x)| \leq \frac{Mh^2}{2}$.

(10%)

(b) 函數 $f(x)$ 在 $[0, \ell]$ 上二次可微且 $|f''(x)| \leq M$, 而 $f^*(x)$ 為 $f(x)$ 在 $[0, \ell]$ 上之
一片斷線性內叉函數; $f^*(x)$ 定義如下

$$f^*(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1}), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

其中 $x_k = kh, k = 0, 1, \dots, n, h = \frac{\ell}{n}, n$ 為一正整數. 利用 (a) 之結果求
最大可能誤差 $\max_{x \in [0, \ell]} |f(x) - f^*(x)|$ 與 n 之關係.

(10%)

3. 敘述以下各數值方法, 請詳細解釋應用於何種問題, 並簡述其演算法

(40%)

(a) 高斯消去法 (Gaussian elimination)

(b) Cubic spline 內叉法 (Cubic spline interpolation)

(c) 辛普森法 (Simpson's rule)

(d) A Runge-Kutta method (任何一種 order 均可).

4. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, 二維向量 X 與 b , 令 $AX = b$, 若 y 為 X 之近似值而
 $\frac{\|b - Ay\|}{\|b\|} = \epsilon$, 其中 $\|b\| = \sqrt{b^T b}$, 問相對誤差 $\frac{\|y - X\|}{\|X\|}$ 之可能範圍.
(若你使用定理, 請敘述該定理之內容)

(20%)

5. 數值積分必須依靠基本積分公式 (quadrature rules), 以下為一 5 點積分公式

$$\int_{-h}^h f(x) dx = a_1 f(-h) + a_2 f(-\frac{h}{2}) + a_3 f(0) + a_4 f(\frac{h}{2}) + a_5 f(h)$$

求令此公式正確之 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 .

(10%)