1. 兩維空間的向量函數 $\vec{f}(x,y)$ 定義如下: $f_x = -y$, $f_y = x$ 。A、B、C、D 四點的座標爲: A (0, 0)、B (0, 1)、C (1, 1)、D (1, 0)。
   (a) 沿路徑 A → B → C, 計算 $\int \vec{f} \bullet d\vec{r}$ 的值。(4%)
   (b) 沿路徑 A → D → C, 再求 $\int \vec{f} \bullet d\vec{r}$ 之值。(4%)
   (c) 從 A 到 C, 沿路徑 $y = x^2$, 再計算 $\int \vec{f} \bullet d\vec{r}$ 之值。(6%)
   (d) 直接計算 $\int \vec{f} \bullet d\vec{r}$ 沿 A → B → C → D 繞一封閉矩形的積分值, 並用此例解釋 Stoke's 定理。(6%)

2. 矩陣 $A = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$。
   (a) 求 A 的 eigen values 和所對應的 eigen vectors。(7%)
   (b) 求矩陣 $A^{1/2}$。(6%)
   (c) 若矩陣 $B = exp(\theta C)$, 其中 θ 爲一常數, 請計算B。(7%)

3. 函數 $u(x,t)$ 滿足一維擴散方程式
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
   依下步驟在 $0 < x < 4$ 區間內, 求解函數 $u(x,t)$, 其邊界條件爲 $u(0,t) = u(4,t) = 0$。
   (a) 說明此方程式是 separable。並寫出變數 x、和 t 的各別方程式。(6%)
   (b) 滿足邊界條件的通解爲何?(7%)
   (c) 若已知時間 $t = 0$ 時的函數爲 $u(x,0) = -\sin(\pi x) + \sin(2\pi x)$, 求 $u(x,t)$。(7%)

4. 用複變殘餘數的技巧, 證明下列兩等式。
   (a)
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a}, \quad a > 0. \ (10\%)$$
   (b)
$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}, \quad a > 1. \ (10\%)$$

5. 請回答下列關於數值解析的問題。
   (a) 用 Taylor 展開證明兩次微分可寫爲:
$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=x_n} = (y_{n-1} + y_{n+1} - 2y_n)/h^2 + R,$$
   其中 $y_{n-1} = y(x_n - h)$、$y_{n+1} = y(x_n + h)$、$y_n = y(x_n)$。(5%)
   (b) 估計上式中的誤差量 R 和分隔值 h 的關係。(5%)
   (c) 簡述用 Guass-Jordan 消去法求反矩陣的原理和方法。(5%)
   (d) 簡述數值積分的 Simpson 法則, 並解釋其原理。(5%)