

成功大學光電科學研究所碩士班入學考

April, 2004

工程數學

- 微分方程式 $(e^x + 3y^2) + 2xy \frac{dy}{dx} = 0$:
 - 求積分因子 $\sigma = \sigma(x)$ 使得上式成爲完全微分。(10%)
 - 利用 (a) 的結果，加上條件 $y(1) = 0$ ，求函數 $y(x)$ 。(10%)
- 週期函數 $f(x + 2\pi) = f(x)$ ，它的 Fourier series 爲 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ ；且已知 $f(x)$ 在 $x = \pi$ 處連續，請計算 $f(x)$ 原函數的解析形式。(15%)
- 二階微分方程式 $P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x) = 0$:
 - 請說明如何判定以上方程式在某點 x_0 爲 regular singular 或 essential singular 的條件爲何？(5%)
 - 若上式在 $x = 0$ 爲一個 regular singular 的點，請證明用 Frobenius 的級數解至少可以找到一個解。(10%)
 - 請解釋 analytical continuation 的觀念。(5%)
- 二階齊式微分方程式 $(1 - x^2) \frac{d^2 y_n}{dx^2} - x \frac{dy_n}{dx} + n^2 y_n(x) = 0$ 、其中 n 爲一常數 (eigen value)。
 - 請說明如何將上式轉化爲 Sturm-Liouville 形式？(10%)
 - 不同 eigen value 的 eigen function 正交關係爲何？(5%)
 - 請證明 (b) 中的正交關係。(10%)
- 請利用左圖的路徑計算積分 $I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^5} dx$ 。(20%)

