

本試題是否可以使用計算機: 可使用, 不可使用 (請命題老師勾選)

(1) 求以下積分

(a) $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$ 10%

(b) $I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}$ 10%

(2) 求以下一階微分方程組的通解(General Solution), α 為常數

$$\frac{dx}{dt} = z + \alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = y + \alpha$$
 20%

$$\frac{dz}{dt} = x + \alpha$$

請把解代入上式驗證其正確性

(3) 求 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0$ 的兩個線性獨立解 20%

(4) (a) $K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $e^{\lambda K} = ?$, λ 為常數 10%

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$, 求 A 的本徵值(eigenvalues)以及本徵向量(eigenvectors) 10%

(5) (a) 寫下解析函數(Analytic Function)的定義 5%

(b) $z = x + iy$, 證明 $|\sin z| \geq \sin x$ 5%(c) 如果 $f(z) = z^*$, 請驗證 $f(z)$ 是否為解析函數 5%(d) 利用 $z = \rho e^{i\theta}$, 求 $z = \sqrt{\frac{3-i}{4+2i}}$ 所對應的 ρ 和 θ 5%