

系所組別： 全校

考試科目： 微積分

考試日期： 0713，節次： 3

※ 考生請注意：本試題 可 不可 使用計算機

1. 試求極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(x - [x])}{e^{\sqrt{x}}}$ ，其中 $[x]$ 為最大整數函數。 (10%)
2. 幕級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ ，試求其收斂範圍，並求其收斂值。 (10%)
3. 設某曲線方程式為
- $$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$
- (a) 求在 $t = \frac{\pi}{4}$ 時，該曲線之切線斜率。 (4%)
- (b) 求該曲線之長。 (6%)
4. 設 $f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$ ，試討論 f 之增減，凹凸及反曲點，並繪製 f 之圖形。 (10%)
5. 設 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ ，求 $f^{(11)}(0)$ 之值。 (10%)
6. 求定積分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^1 \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx$ 。 (10%)
7. 設 $R = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ ，求 $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dA$ 。 (10%)
8. 設方程式 $w = x + y^2 + z^3$ 及 $z^3 - xy + yz + y^3 = 1$ ，其中 x, y 為獨立變數，求在點 $(x, y, z) = (2, -1, 1)$ 時之 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 之值。 (10%)
9. 設 $f(x, y, z) = 3x + y + z$ ，求函數 f 在滿足 $y^2 + z^2 = 5$ 及 $x + y - z = 1$ 兩條件下時之極大值。 (10%)
10. 設區域 R 為由曲線 $y = \sqrt{x}$ ，直線 $y = 2$ 及 $x = 0$ 所圍成，求此區域 R 對直線 $x = 4$ 旋轉所圍之體積。 (10%)