

注意：不必抄題，但須標明題號。

一. 求下列二極限：(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$; (16分)

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \sin(1/x)}{x - [x]}$, 內 $[]$ 為最大整數函數。

二. 設 $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ 而 $f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{若 } x \in [1, 2]. \end{cases}$ (12分)

(1) 試問 f 是否為可積？理由為何？

(2) 求一函數 $F: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [0, 2], F'(x) = f(x)$.

三. (1) 設 $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{4n^2 + k^2}$. 試問序列 $\{a_n\}$ 是否收斂？ (18分)

若是，則求其極限。

(2) 求冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n+1}}{n+1}$ 之收斂區間。

四. (1) 求 $\int \frac{x \exp(x^2)}{\exp(x^2) + 1} dx$ 之值；(2) 求 $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx$ 之值； (24分)

(3) 證明瑕積分 $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ 收斂於 $\sqrt{\pi}/2$.

五. 試繪製 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 之圖形。 (14分)

六. (1) 設 $x = \rho \cos \theta \sin \phi$, $y = \rho \sin \theta \sin \phi$, $z = \rho \cos \phi$ 為球面坐標變換，試求 $\frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y, z)$ 及 (16分)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(p, \theta, \phi) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(p, \theta, \phi) & \frac{\partial x}{\partial \phi}(p, \theta, \phi) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(p, \theta, \phi) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(p, \theta, \phi) & \frac{\partial y}{\partial \phi}(p, \theta, \phi) \\ \frac{\partial z}{\partial \rho}(p, \theta, \phi) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(p, \theta, \phi) & \frac{\partial z}{\partial \phi}(p, \theta, \phi) \end{vmatrix};$$

(2) 試利用重積分方法，求半徑為 r 之球體體積。