注意(甲)本試題分兩大部份，第一部份(1—4題)每題10分，第二部份(5—8題)每題15分，務請依序作答，否則酌予扣分。

(乙)不抄題，但須標明題號。

第一部份

1.(a) 證：若 $\lim_{x\to a} f(x) = A > 0$，則必存在 a 為中心，δ 為半徑之區間，在其內 $f(x)$ 恒為正。$f(a)$ 應如何規定？

(b) 問：函數 f 應具備甚麼條件才可以作

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)},\quad n = 2, 3, 4, \cdots$$ 之演算？

2. 證明擺線(cycloid) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$，常數 $a > 0$，恒凹向下(concave downward)。

3. 設 (i) $f \in C^2$ (即 f'' 存在且連續)

(ii) $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$

求 $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta^2 f(x)}{(\Delta x)^2}$。

4. 證明 $\dfrac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + \cdots + (n+1)^2 x^n + \cdots$，$|x| < 1$。

第二部份

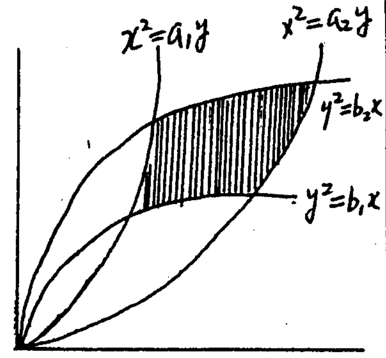
5.(a) 證明 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$ a_k, b_k 為任意實數。

(b) 設 $x+2y+3z+4=0$，求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 之極小值.

6. (a) 求拋物線 $x^2=ay$，$y^2=bx$ $(a,b>0)$ 所圍區域之面積.

(b) 用 (a) 之結果，求：
$x^2=a_1y$，$x^2=a_2y$，$y^2=b_1x$，$y^2=b_2x$
$(a_2>a_1>0$，$b_2>b_1>0)$
四者所圍區域之面積.



7. (a) 設 $y^2(a-x)=x^3$，$a\neq 0$，求 $\int \frac{dx}{y}$.

(b) 求 $\int_0^1\left[\int_x^1 \frac{\sin y}{y}\,dy\right]dx$.

8. $f(x,y)$ 經 $x=e^s$，$y=e^t$ 之代換變作 $g(s,t)$.
若 f 滿足 $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$,
g 滿足 $a\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+b\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}+c\frac{\partial g}{\partial s}+d\frac{\partial g}{\partial t}=0$.
求 a, b, c, d 四常數的值.