

注意：(1) 務請依序作答，否則酌予扣分。

(2) 不抄題，但須標明題號。

(3) 每道題均須寫出計算過程或說明理由，否則不予計分。

一. 求下列二極限：(a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  (10分)

二. (a) 試問級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{e}}}$  是否收斂？理由為何？

(b)  $f(x) = x^{\sin x}$  求  $f'(x)$ . (10分)

三. 求下列積分值

(a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$       (b)  $\int_{-1}^1 \sin x^3 dx$       (c)  $\int_0^2 \int_y^2 e^{x^2} dx dy$

(d)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$  (20分)

四. (a) 求曲線  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$  在  $[0, 2\pi]$  間之弧長. (5分)

(b) 設曲線  $C$  為  $\begin{cases} x^2 = x^2 + y^2 \\ y = 1 + x + y \end{cases}$  之交集，求  $C$  上距原點最近之點. (10分)

五. 設  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{若 } x \neq 0 \\ 0 & \text{若 } x = 0 \end{cases}$

(a) 問  $f$  在  $x=0$  是否連續？理由為何？ (5分)

(b) 問  $f$  在  $x=0$  是否可微？理由為何？ (10分)

六. 有一燈塔距海岸線 3 公里，以每分鐘 8 圈旋轉，試問當燈光與海岸線成  $45^\circ$  角時，燈光沿海岸線移動之速度. (10分)

七. 若函數  $f$  與  $g$  在  $[a, b]$  間連續且  $f(a) < g(a) < g(b) < f(b)$ .

證明: 存在  $p \in (a, b)$  使得  $f(p) = g(p)$ . (10分)

八. 以積分方法求橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  之面積 ( $a > 0, b > 0$ ). (10分)