

78 學年度轉學生入學考試微積分試題

☆注意:

- (1) 務請依序作答, 否則酌予扣分。
- (2) 不需抄題, 但須標明題號。
- (3) 每一題均須寫出計算過程或說明理由, 只有答案不予計分。
- (4) 試題中之 R 表實數系。

1. 試求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^3} \right] \cdot x^5 = ?$ (其中 $[\cdot]$ 為最大整數函數) (10 分)

2. 設函數 $f: R \rightarrow R, p \in R.$

(a) 試證: 若 f 於點 p 為右可微(即右導數存在), 則 f 於點 p 為右連續. (7 分)

(b) 若 f 於點 p 為右連續, 試問 f 於點 p 是否必為右可微. (若為肯定, 則證之, 若為否定, 則應舉一反例.) (8 分)

3. (a) 試證: $\forall x > 0, \ln(1 + 1/x) > (1 + x)^{-1};$ (7 分)

(b) 試問函數 $f: (0, +\infty) \rightarrow R$ 而 $f(x) = (1 + 1/x)^x$ 於何處有極大、極小值. (8 分)

4. 設函數 $f: I \rightarrow R$, 其中 I 為一非退化區間.

(a) 試證: 若 f 為連續, 則 f 必具反導函數. (5 分)

(b) 試問: 若 f 具反導函數, f 是否必為連續? (5 分)

5. 試求不定積分 $\int \frac{x^5}{(x^2 - 2)^{1/2}} dx.$ (10 分)

6. 設 $f(x) = \int_{2x}^{x-4} \frac{x}{1 + \sqrt{t}} dt$; 試求 $f'(2) = ?$ (10 分)

7. 設 $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$; 試問 f 於何處有極大、極小值? (15 分)

8. 試求積分 $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx = ?$ (15 分)