

注意：不必抄題，但須標明題號。

一、求下列二極限：(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ ; (16分)

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \sin(1/x)}{x - [x]}$ , 內  $[ ]$  為最大整數函數。

二、設  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  而  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{若 } x \in [1, 2]. \end{cases}$  (12分)

(1) 試問  $f$  是否為可積？理由為何？

(2) 求一函數  $F: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $\forall x \in [0, 2], F'(x) = f(x)$ .

三、(1) 設  $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{4n^2 + k^2}$ . 試問序列  $\{a_n\}$  是否收斂？ (18分)

若是，則求其極限。

(2) 求幂級數  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n+1}}{n+1}$  之收斂區間。

四、(1) 求  $\int \frac{x \exp(x^2)}{\exp(x^2) + 1} dx$  之值；(2) 求  $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx$  之值； (24分)

(3) 證明瑕積分  $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx$  收斂於  $\sqrt{\pi}/2$ .

五、試繪製  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  之圖形。 (14分)

六、(1) 設  $x = \rho \cos \theta \sin \phi$ ,  $y = \rho \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = \rho \cos \phi$  為球面坐標變換，試求  $\frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y, z)$  及 (16分)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(p, \theta, \phi) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(p, \theta, \phi) & \frac{\partial x}{\partial \phi}(p, \theta, \phi) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(p, \theta, \phi) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(p, \theta, \phi) & \frac{\partial y}{\partial \phi}(p, \theta, \phi) \\ \frac{\partial z}{\partial \rho}(p, \theta, \phi) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(p, \theta, \phi) & \frac{\partial z}{\partial \phi}(p, \theta, \phi) \end{vmatrix};$$

(2) 試利用重積分方法，求半徑為  $r$  之球侖侖積。