

注意(甲)本試題分兩大部份。第一部份(1-4題)每題 10 分。第二部份(5-8題)每題 15 分。務請依序作答，否則酌予扣分。

(乙)不抄題，但須標明題號。

第一部份

1. (a) 證：若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0$ ，則必存在 a 為中心， δ 為半徑之區間，在其內 $f(x)$ 恒為正。 $f(a)$ 應如何規定？

(b) 問：函數 f 應具備甚麼條件才可以作

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \text{之演算?}$$

2. 證明擺線 (cycloid) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ ，常數 $a > 0$ ，恒凹向下 (concave downward)。

3. 設 (i) $f \in C^2$ (即 f'' 存在且連續)

$$(ii) \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\text{求 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 f(x)}{(\Delta x)^2}.$$

4. 證明 $\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + \dots + (n+1)^2 x^n + \dots$, $|x| < 1$.

第二部份

5. (a) 證明 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right), \quad a_k, b_k \text{ 為任意實數.}$$

(b) 設 $x+2y+3z+4=0$. 求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 之極小值.

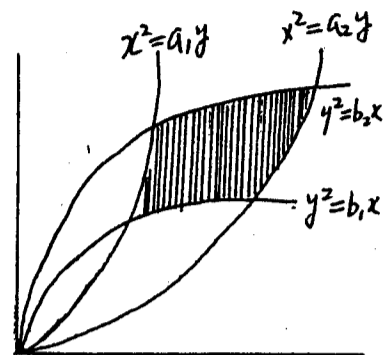
6. (a) 求拋物線 $x^2=ay$, $y^2=bx$ ($a, b > 0$) 所圍區域之面積.

(b) 用 (a) 之結果, 求:

$$x^2=a_1y, x^2=a_2y, y^2=b_1x, y^2=b_2x$$

$$(a_2 > a_1 > 0, b_2 > b_1 > 0)$$

四者所圍區域之面積.



7. (a) 設 $y^2(a-x)=x^3$, $a \neq 0$, 求 $\int \frac{dx}{y}$.

(b) 求 $\int_0^1 \left[\int_x^1 \frac{\sin y}{y} dy \right] dx$.

8. $f(x,y)$ 經 $x=e^s$, $y=e^t$ 之代換變作 $g(s,t)$.

$$\text{若 } f \text{ 滿足 } x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$g \text{ 滿足 } a \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + b \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + c \frac{\partial g}{\partial s} + d \frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

求 a, b, c, d 四常數的值.