

注意：(1) 務請依序作答，否則酌予扣分。

(2) 不抄題，但須標明題號。

(3) 每道題均須寫出計算過程或說明理由，否則不予計分。

一. 求下列二極限：(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (10分)

二. (a) 試問級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{e}}}$ 是否收斂？理由為何？

(b) $f(x) = x^{\sin x}$ 求 $f'(x)$. (10分)

三. 求下列積分值

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$ (b) $\int_{-1}^1 \sin x^3 dx$ (c) $\int_0^2 \int_y^2 e^{x^2} dx dy$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ (20分)

四. (a) 求曲線 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 在 $[0, 2\pi]$ 間之弧長. (5分)

(b) 設曲線 C 為 $\begin{cases} x^2 = x^2 + y^2 \\ y = 1 + x + y \end{cases}$ 之交集，求 C 上距原點最近之點. (10分)

五. 設 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{若 } x \neq 0 \\ 0 & \text{若 } x = 0 \end{cases}$

(a) 問 f 在 $x=0$ 是否連續？理由為何？ (5分)

(b) 問 f 在 $x=0$ 是否可微？理由為何？ (10分)

六. 有一燈塔距海岸線 3 公里，以每分鐘 8 圈旋轉，試問當燈光與海岸線成 45° 角時，燈光沿海岸線移動之速度. (10分)

七. 若函數 f 與 g 在 $[a, b]$ 間連續且 $f(a) < g(a) < g(b) < f(b)$.

證明: 存在 $p \in (a, b)$ 使得 $f(p) = g(p)$. (10分)

八. 以積分方法求橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 之面積 ($a > 0, b > 0$). (10分)