

- 注意事項： 1. 答案一律寫在試卷上，否則不予計分。
2. 請標明題號，依序作答，不必抄題。
3. 試題應隨同試卷交回，不得攜出試場。

- (1) 以下有關「函數」之表示法，哪些是錯誤的？理由為何？（未陳述理由者不予計分）。 (10%)
- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \tan^{-1} x$, (註： \tan^{-1} 即 \arctan).
- (b) $z = g(x, y)$ 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- (c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: h(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$.
- (d) $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \phi(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.
- (e) $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: \psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{若 } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
- (2) 設 $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n}$, $\forall n = 2, 3, 4, \dots$. 試問序列 $\{a_n\}_{n \geq 2}$ 是否為收斂？若是，則求其極限。 (10%)
- (3) 試求不定積分 $\int \ln(x^2 + a^2) dx$, 其中 a 為一常數。 (10%)
- (4) (a) 試問雙曲正切函數 $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 是否為可逆（即 \tanh 是否有反函數）？理由為何？ (7%)
- (b) 若 \tanh 為可逆，則求其反函數，否則求其導函數之最大值。 (8%)
- (5) 一半徑為 2 公尺之球形容器，由頂端每分鐘注入 0.5 立方公尺之水，試問當水高為 h 公尺時，①水之體積為若干？②水面上升之速率為何？ (10%)
- (6) (a) 試證：若 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 為收斂，則 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 為收斂。 (10%)
- (b) 舉一反例以說明：一收斂級數未必為絕對收斂。 (5%)
- (7) 試求 $y = x^2$ 在點 $(-1, 1)$ 之曲率半徑及曲率中心。 (10%)
- (8) 設 $E = \{(x, \cos x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, 試問函數 $f: E \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = x^2 - y^2$ 於何處有極大值，於何處有極小值，並說明其為絕對極值或相對極值。 (10%)
- (9) 設 E 乃 \mathbb{R}^2 平面上以點 $(a, 0)$ 為中心，以正數 a 為半徑之圓區域，試求 $f(x, y) = \sqrt{x}$ 在 E 上之二重積分。 (10%)