注意事項：1. 答案一律寫在試卷上，否則不予計分。
2. 請標明題號，依序作答，不必抄題。
3. 試題應隨同試卷交回，不得攜出試場。

(1) 設 $f(x) = x\sin\frac{1}{x} + x$.

(a) 試求 $\lim_{x\to 0} f(x) = ?$ (5%)

(b) 試求 f 圖形之漸近線. (10%)

(2) 一粒子在一直線上移動，最初五秒它自固定點（即原點）以每秒二公尺之速度移動，其後三秒鐘它靜止不動，之後 12 秒鐘它繼續依照最初移動方向以每秒三公尺之速度前進．試將該粒子之位置表為時間 t 之函數．（即表為 $f: A \to B : f(t) = \cdots$，其中 A、B 及 $\cdots$ 皆需清楚表示）. (10%)

(3) 以下四小題僅需寫出答案，不必說明或推演： (20%)

(a) 寫出一不為單調 (monotone) 且不為連續之 Riemann 可積函數．
（表為 $f: [?,?] \to \mathbb{R} : f(x) = \cdots$）.

(b) 舉出一反例以說明以下陳述不真：『若函數 f 為可微且為遞增（即 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$），則 $f' > 0$.』

(c) 級數 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1} + \cdots$ 之和 $s = ?$

(d) 試以極坐標方程式表示『圓心在點 (0,3)，直徑為 6 之圓．』

(4) 對於 $\epsilon > 0$，欲求最小的自然數 n_0，以使

$$(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon\Big).$$

(a) 若 $\epsilon \geq \frac{1}{2}$，則 $n_0 = ?$ (5%)

(b) 若 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$，則 $n_0 = ?$ (5%)

(5) 試求 $\sin^{-1}$（即 arcsin）與 X 軸在區間 $[a,b]$ 所圍區域之面積，其中 $[a,b]$ 為 $\sin^{-1}$ 之定義域. (10%)

(6) 若已知 $\nabla f(x,y) = (2xy,\ x^2 + \sin y)$，$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ 且 $f(0,0) = 0$，試求 $f(1,\pi) = ?$ (10%)

(7) 設 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = 2x^4 + 3y^3 - x^2 y$.

(a) 試求 f 之臨界點 (critical points)，並問於其上是否有相對極大或相對極小值？ (8%)

(b) 在條件 $x^2 + y = 0$ 下，f 是否有最大值及最小值？若有，則求之. (7%)

(8) 設

① $f: D_f \to \mathbb{R} : f(x,y) = e^x$ 其中 $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$;

② $\forall a \in \mathbb{R}$，$S(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq a\}$;

③ $G(a) =$ “ f 在 $S(a) \cap D_f$ 上之二重積分 ”.

試求 $G(a) = ?$ [提示] 應考慮不同情況之 a. (10%)