

- 注意事項： 1. 答案一律寫在試卷上，否則不予計分。
2. 請標明題號，依序作答，不必抄題。
3. 試題應隨同試卷交回，不得攜出試場。

1. 設 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{當 } |x| < 1 \\ 0, & \text{當 } |x| \geq 1 \end{cases}$, 令 $g(x) = \frac{1}{2} \left\{ \left(x + \frac{3}{2}\right)f\left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - x\right)f\left(x - \frac{1}{2}\right) \right\}$

(a) 寫出僅含變數 x 的函數 g 表示式 (即不含函數 f)。 (4%)

(b) 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g'(x)$ 。 (6%)

2. 試證明下列敘述為真，或舉反例說明其為偽

(a) 若函數 f 於 $[a, b]$ 可微，則 f 於 $[a, b]$ 連續。 (6%)

(b) 若函數 f 於 $[a, b]$ 可積，則 f 於 $[a, b]$ 連續。 (6%)

3. 冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$

(a) 求收斂範圍。 (6%)

(b) 求其和。 (6%)

4. 設函數 $y = x^\alpha$ 與 $y = x^{2\alpha}$, 其中 $x \geq 0, \alpha > 0$ 。令此兩曲線所圍之區域繞 x 軸旋轉；並設此旋轉體之體積為 V

(a) 求 V 。 (6%)

(b) 求 α 值，使得體積 V 最大。 (6%)

5. 設函數 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$, 請討論此函數圖形之遞增、減性，凹、凸性，反曲點，相對極值，漸近線等，並繪其圖。 (15%)

6. 設拋物線 $y = x^2$ 與直線 $x - y - 2 = 0$, 求此兩線距離最短時之點座標，並求此距離。 (12%)

7. 設函數 $F(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

(a) 試證此函數 F , 滿足 Laplace equation, 即 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ 。 (6%)

(b) 設 $F(x, y)$ 為滿足 Laplace equation 的任一函數，令函數 $G(x, y) = F\left(\frac{ax}{x^2 + y^2}, \frac{ay}{x^2 + y^2}\right)$, 試證函數 G 亦滿足 Laplace equation。 (6%)

8. 設函數 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 與函數 $z = 2 - x^2 - y^2$, 此兩函數圖形所圍固積為 S

(a) 請用直角座標系統表示求此固體 S 之體積所需之三重積分式 (僅需列出積分式)。 (5%)

(b) 請用極座標系統表示求此固體 S 之體積所需之二重積分式 (僅需列出積分式)。 (5%)

(c) 請用旋轉體之殼法表示求此固體 S 之體積所需之積分式 (僅需列出積分式)。 (5%)