

- 注意事項： 1. 答案一律寫在答案卷上，否則不予計分。  
 2. 請標明題號，依序作答，不必抄題。  
 3. 試題應隨同答案卷交回，不得攜出試場。

(1) 填空題：(每一小題四分) (28%)

請於答案卷上寫出以下①~⑦題之解，不必寫出任何計算過程或理由，如果該小題之解不存在，只需寫『不存在』即可。

設

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: G(x) = \int_{-1}^x f(t) dt.$$

則

- $f$  之值域 = ①;
- 若  $f'(x) = 1$ , 則  $x =$  ②;
- 當  $x < 0$  時,  $G(x) =$  ③;
- 當  $x = 0$  時,  $G(x) =$  ④;
- 當  $x > 0$  時,  $G(x) =$  ⑤;
- $G'(0) =$  ⑥;
- $G$  之圖形過點  $(0, G(0))$  之切線方程式為 ⑦.

(2) 設  $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \tan^{-1}(x)$ . (註:  $\tan^{-1}$  即  $\arctan$ .)

(a) 試求  $f$  之導函數; (5%)

(b) 試求  $\int_{-3}^3 f(x) dx = ?$  [提示] 以瑕積分方式處理之. (5%)

(3) (a) 設  $f$  於區間  $[a, b]$  上為 Riemann 可積. 試證:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx; \quad (6\%)$$

(b) 設  $f$  在區間  $[a, b]$  上為二階可微分, 舉一反例以說明陳述

[若  $f$  在區間  $[a, b]$  上為凸狀 (convex), 則  $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ .]

不真. (務必說明理由.) (6%)

(4) 設一質點之位置向量函數 (position vector function) 為  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , 已知其加速度向量為  $\mathbf{a}(t) = (3, 0, -4e^{2t})$ , 在時間 0 之速度向量為  $\mathbf{v}(0) = (1, 6, 0)$  而最初位置為  $\mathbf{f}(0) = (1, 2, 3)$ .

(a) 試求  $\mathbf{f}(t) = ?$  [提示:  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}'(t)$ ,  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$ .] (10%)

(b) 試求  $\mathbf{f}$  之第一分量函數 (first component function) 之最大值及最小值. (5%)

(背面仍有題目, 請繼續作答)

(5) 設  $p > 1$ ，試判別級數  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p}$  之斂散性。 (10%)

(6) 設函數

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = \begin{cases} 2\sqrt{xy}, & \text{若 } xy \geq 0, \\ 0, & \text{若 } xy < 0. \end{cases}$$

試問以下二者是否存在，若存在則求之，若不存在則說明理由。

(a)  $\nabla f(0, 0)$ ; (6%)

(b) 此曲面過原點之切面。 (6%)

(7) 設  $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ， $S = \{(x, y) \mid x > 0, 0 \leq y \leq \sqrt{3x}, x^2 + y^2 \leq 1\}$ 。

(a) 試繪出  $S$  之圖形； (3%)

(b) 試求  $f$  在集合  $S$  上之二重積分。 (10%)