

80 學年度轉學生入學考試微積分試題

☆注意：

- (1) 務請依序作答，否則酌予扣分。
 (2) 不需抄題，但須標明題號。
 (3) 每一題均須寫出計算過程或說明理由，只有答案不予計分。
 (4) 試題中之 \mathbb{R} 表實數系。

1. (a) 令 $a_n > 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，證明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$ 收斂。(此處 k 為大於 1 之常數) (8 分)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2(\frac{1}{n})$ 是否收斂？說明理由。 (8 分)

2. 一登山者於週六早上四點登山，中午到達山頂過夜，隔天(週日)早上五點循原路下山，於早上十一點到達山腳出發點，證明該登山者在登山路線上某點於上、下山兩天中其手錶呈現同樣時間。 (10 分)

3. 設函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續且滿足方程式 $f(x) = \int_0^x f(t) dt + 1$ 試求此函數 f 。 (10 分)

4. (a) 求 $\int_0^2 \int_y^2 e^{x^2} dx dy$ 。 (8 分)

(b) 令 $R = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 求 $\int_R \int \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} d\Lambda$ 。 (8 分)

(c) $S = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\}$ 求 $\int_S \int e^{x+y} d\Lambda$ 。 (8 分)

5. 求冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n+1}}{n+1}$ 之收斂集。 (10 分)

6. 求下列積分

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-e^x)} dx$ (b) $\int_0^8 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx$ (10 分)

7. 求下列極限

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{x^2}$ (10 分)

8. 用積分方法求橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 之面積 ($a > 0, b > 0$)。 (10 分)